

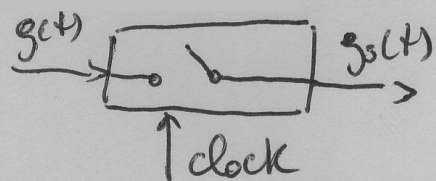
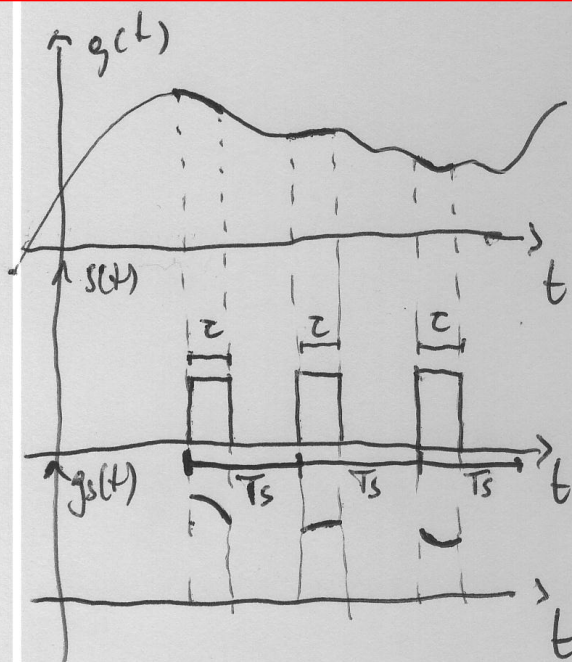
# Corso di Teoria dei Segnali

## a.a. 2010-2011

Esercitazione n. 4 – Campionamento, segnali PAM e PCM

CONVERSIONS A/D ---

CAMPIONATORI NATURALI



$$g_s(t) = g(t) s(t)$$

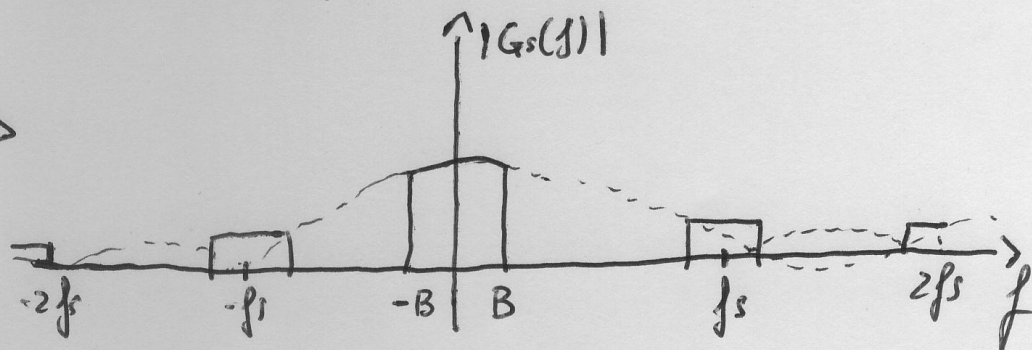
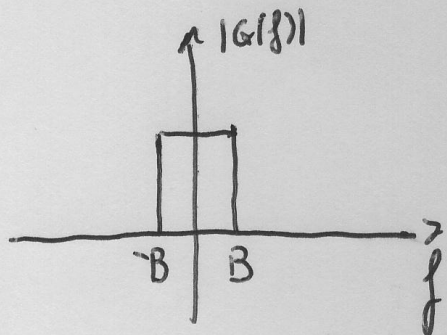
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \left( \frac{t - kT_s}{\tau} \right)$$

$$T_s = 1/f_s \quad f_s \geq 2B$$

proprietà della  
moltiplicazione

$$F[g_s(t)] = G_s(f) = d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{similind}}{\text{ind}} G(f - n f_s)$$

$d = \tau/T_s$  duty cycle,  $G(f) = F[g(t)] \Downarrow$



Se  $f_s$  free  $< 2B$  si avrebbero sovrapposizioni degli spettri replicati (aliasing).

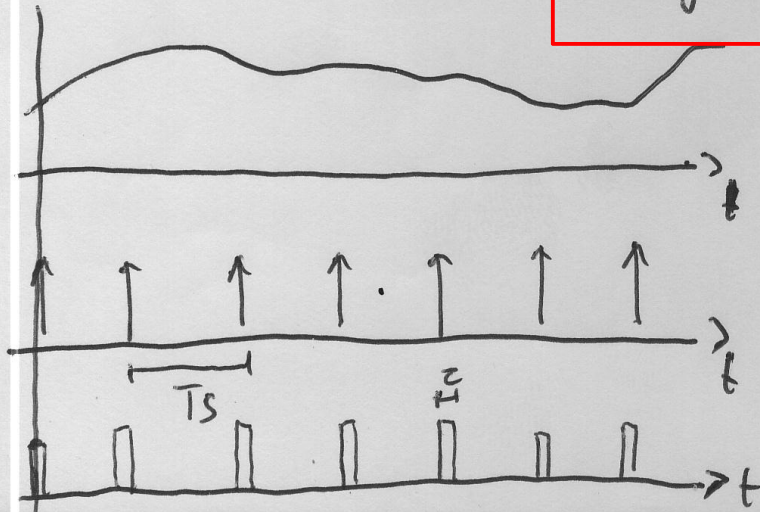
RIDUCENDO  $\tau \rightarrow 0$  SI OTTIENI IL CAMPIONATORE ISTANTANEO

$$g_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(kT_s) h(t - kT_s)$$

$$h(t) \triangleq \pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad \text{e } \tau \ll T_s$$

DA CUI:

$$G_s(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - kf_s) \quad \text{e } H(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$



LA FORMA DI  $h(t)$  può anche essere di tipo  $\sin x / x$  (occupa meno banda)



IN FASE DI MCS210N5 IL SEGNALE PCM SARÀ AFFECTO DA **ERRORS**:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pr-out}} = \frac{3\pi^2}{1 + 4(\pi^2 - 1)P_e}$$

↑ errore di quantizzazione    ↓ errore di rigenerazione

← potenza di picco del segnale  
← potenza media statistica di disturbo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\pi^2}{1 + 4(\pi^2 - 1)P_e}$$

← potenza media del segnale  
← potenza media <sup>statistica</sup> del rumore

QUANDO  $P_e$  È TRASCURABILE (CANALI QUASI IDEALI):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02m + \alpha \quad \text{con} \quad \alpha = 4.77 \quad \times \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pr}} \\ \alpha = 0 \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{media}}$$

**REGOLA DEI 6 dB**

### ESSEMPIO 22)

SEGNALI gchi di BANDA 3200Hz ; LO SI CONVERTE IN PCM USANDO UNA  $f_s = 7000$  samples/s E QUANTIZZATORE A 64 LIVELLI ;  $P_e = 10^{-4}$ . CALCOLA:

a) BANDA SEGNALI PCM (IMPULSI RETTANGOLARI) :

$$M=64 \Rightarrow m=6 \Rightarrow R=m \cdot f_s = 6 \cdot 7000 = 42 \text{ kbps} \Rightarrow B=R=42 \text{ kHz}$$

b)  $\frac{S}{N}$  MEDIO :

$$\left( \frac{S}{N} \right) = \frac{\pi^2}{1 + 4(\pi^2 - 1)P_e} = 1552,7$$

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{dB} = 10 \lg_{10} 1552,7 \approx 32 \text{ dB}$$

### ESEMPIO 23)

SIGNALS DI BANDA 4.2 MHz DA CONVERTIRE IN PCM E  $(\frac{S}{N})_{\text{PCM}} \geq 55 \text{ dB}$  DI  
ALMENO 55 dB: CALCOLARE:

a) m ed M (SI IPOTIZZARE  $P_e = 0$ )  $\Rightarrow 55 = 6.02m + 4.77 \Rightarrow m = \lceil 8.34 \rceil = 9 \text{ bit}$

DA CUI  $M = 2^m = 512$

b) VELOCITÀ DI TRASMISSIONE:  $f_s = 2B = 2 \cdot 4.2 \times 10^6 = 8.4 \times 10^6 \text{ samples/s}$

$R = m \cdot f_s = 9 \cdot 8.4 \times 10^6 = 75.6 \text{ Mbps}$

$B_{\text{PCM}} = R = 75.6 \text{ MHz}$

### ESEMPIO 24)

UN HD da 20 GB È USATO PER MEMORIZZARE UN SEGNALE PCM CON  
 $f_s = 8000 \text{ Hz}$  E  $(\frac{S}{N}) \geq 30 \text{ dB}$ . QUANTE ORE DI SEGNALE SI POSSONO MEMORIZZARE?



$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 6.02 M \Rightarrow m = \left\lceil \frac{30}{6.02} \right\rceil = \lceil 4.98 \rceil = 5 \text{ bit}$$

$$R = m \cdot f_s = 5 \cdot 8000 = \\ = 40000 \text{ bps} = \\ = 40 \text{ kbps}$$

$$R = 5 \text{ kbps}$$

DAI DATI DELLA TRACCIA POSSIAMO SCRIVERE :

$$5 \cdot 1000 \cdot t = 20 (1024)^3 \Rightarrow t = \frac{20 (1024)^3}{5000} \approx 4294767 \\ m h = t / 3600 \approx 1193 h$$

ESEMPIO 24)

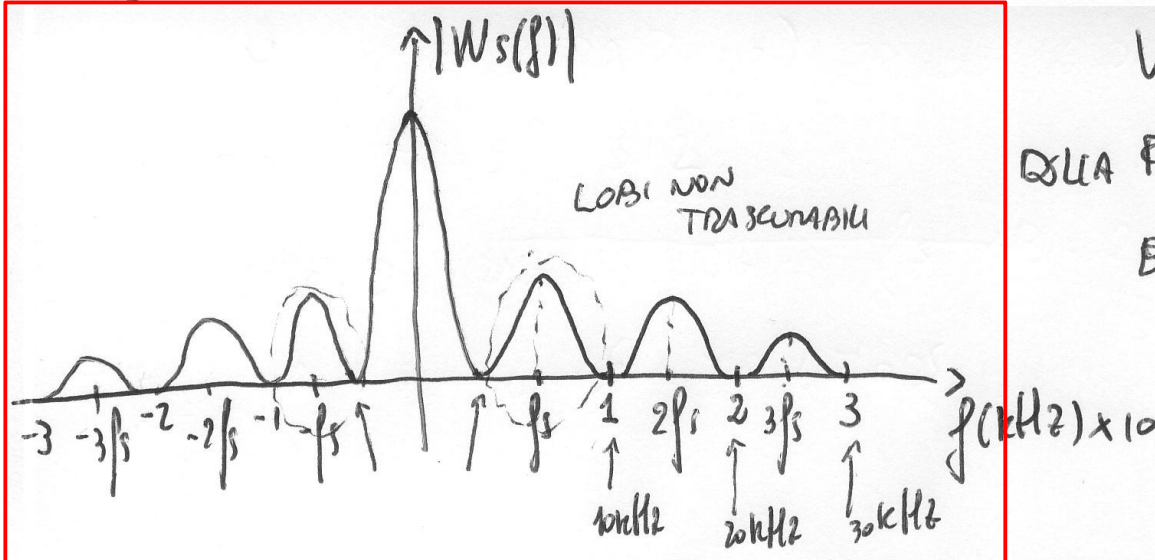
SEGNAL $\varepsilon$   $w(t)$  COSTITUITO IN PAM CON IMPULSI RETTANGOLARI DI DURATA 100 ns  $\varepsilon$   $f_s = 8 \text{ kHz}$ . SUPPONENDO CHE  $w(f) = 2 \lambda(f/B)$   $\varepsilon$   $B = 3 \text{ kHz}$ , CALCOLARE :

$$a) \text{ Spettro PAM: } W_s(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - k f_s) \quad H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \\ = \tau \text{Sinc}(\pi \tau f)$$

$$W_s(f) = \frac{1}{T_s} \cdot z \operatorname{sinc}(\pi z f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\lambda \left( \frac{f - k f_s}{B} \right)$$

$$z = 100 \mu s = 10^{-4} s$$

$$1/T_s = 8 \times 10^3 \text{ Hz} \quad B = 3 \times 10^3 \text{ Hz}$$



$W(f)$  SI RIPETE A MULTIPLI  
 DELLA FREQ. DI CAMPIONAMENTO  
 ED È PESATA DA  $z \operatorname{sinc}(\pi z f)$

b) VALORE NOTO NELLA BANDA AL PRIMO NULO : SI CONSIDERA LA FUNZIONE

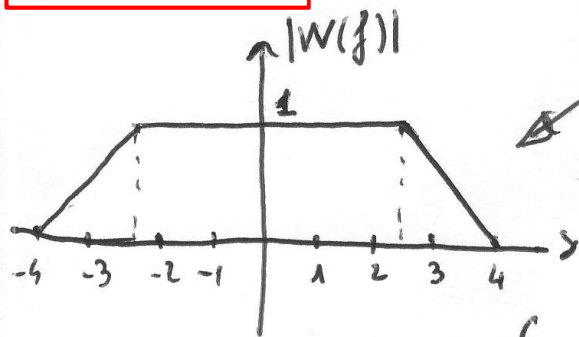
$$\sin x / x \text{ CHE SI ANNULLA : } \sin c(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi ; \text{ POICHÉ }$$

$$\text{CONSIDERIAMO IL PRIMO NULO } k=1 \Rightarrow \pi z f = \pi k = \pi \Rightarrow z = 1/f \Rightarrow f =$$

$$= \frac{1}{z} = \frac{1}{100 \times 10^{-6}} = \boxed{10 \text{ kHz}}$$



# ESEMPIO 25)



SPETTRO DI  $w(t)$ , CAMPIONATO CON  $f_s = 10 \text{ kHz}$  E  
IMPULSI DI DURATA  $\tau = 50 \mu\text{s}$ . DETERMINARE LO  
SPETTRO PER CAMP. NATURALE E CAMP. ISTANTANEO.

$$B = 4 \text{ kHz}, f_s = 10 \text{ kHz} \quad (\text{SHANNON \text{E} RISPETTATO})$$

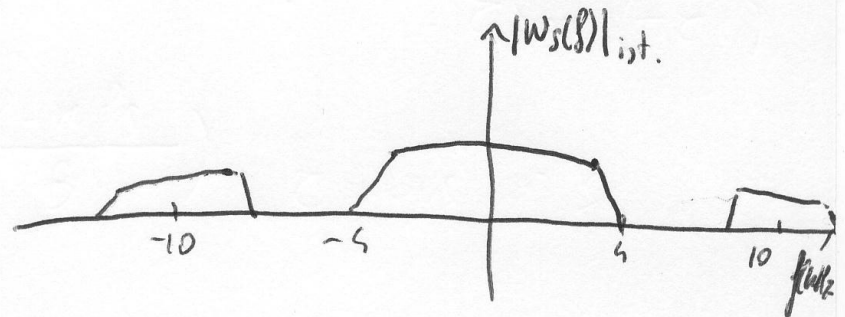
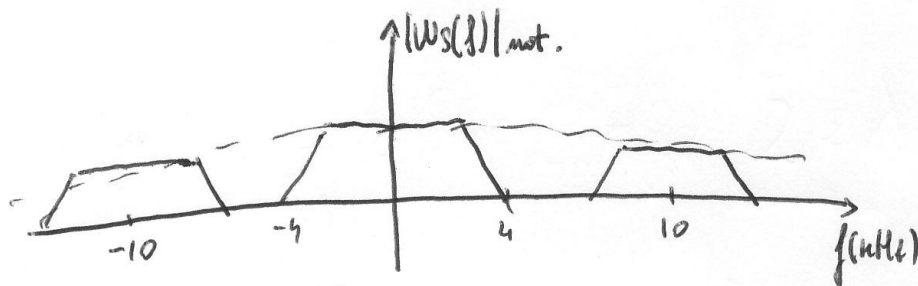
$$d = \tau / T_s = 50 \cdot \frac{10^{-6}}{10 \cdot 10^3} = 5 \times 10^{-9} = 0,005 \times 10^{-6}$$

PER CAMPIONAMENTO NATURALE:

$$W_s(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi m d}{\pi m d} W(f - m f_s)$$

PER CAMPIONAMENTO ISTANTANEO:

$$W_s(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} W(f - k f_s) \quad H(f) = \tau \text{sinc}(\pi \tau f)$$

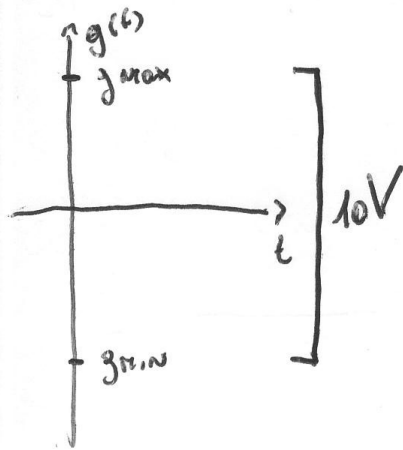


### ESSEMPIO 26)

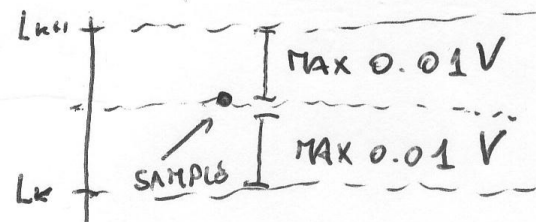
SI DEVE TRASMETTERE UNA <sup>segn</sup>CONV D'ONDA IN PCM CON ACCURATEZZA PARI AD 0,1% DELLA DINAMICA PICCO-PICCO. IL SEGNALE HA UNA BANDA DI 100 Hz E UNA DINAMICA DELLE AMPIEZZE DI 10V. CALCOLARE:

a)  $f_{s \min}$ ? PER SHANNON:  $f_s \geq 2B \Rightarrow f_{s \min} = 2B = 200 \text{ Hz}$

b) NUMERO MINIMO DI BIT RICHIESTI PER LA PAROLA PCM:



SI DESIDERA COMMETTERE UN ERRORE MASSIMO DI QUANTIZZAZIONE PARI A  $\frac{0.1 \cdot 10}{100} = 0.01 \text{ V}$ , CIOE' QUANDO SI ASSOCIA UN LIVELLO AD UN CAMPIONE.



QUINDI L'AMPIEZZA DEL PASSO DI QUANTIZZAZIONE  $p = 2 \cdot 0.01 = 0.02 \text{ V}$

PER CONOSCERE IL NUMERO DI LIVELLI, IMPONIAMO:

$$\frac{10}{M} \equiv 0.02 \Rightarrow M = \frac{10}{0.02} = 500$$



DA CUI  $m = \lceil \log_2 500 \rceil = 9$

c) VELOCITÀ / BIT-RATE DI TRASMISSIONE:  $R = m \cdot f_s = 9 \cdot 200 = 1800 \text{ bps} = 1,8 \text{ kbps}$

d) BANDA MINIMA RICHIESTA PER LA TRASMISSIONE SUL CANALE

SE  $\frac{\sin x}{x} \Rightarrow B = \frac{1}{2} R = 900 \text{ Hz}$

SE  $\pi \Rightarrow B = R = 1800 \text{ Hz}$

QUANTIZZAZIONE NON UNIFORME:  $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02m + \alpha$

$\mu$ -law (USA)  $\alpha \approx 4.77 - 20 \log [\ln(1+\mu)]$

A-law (EUROPA)  $\alpha \approx 4.77 - 20 \log [1 + \ln A]$